Percorso d'Eccellenza Metodo di Green

Seconda esperienza

D'Amico Francesco

29 agosto 2020

Indice

1 Laplaciano e Potenziali fisici

Il Laplaciano è l'operatore N-dimensionale definito come

$$\Delta := \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1}$$

Questo operatore è di grande interesse fisico; in particolare in tre dimensioni è l'operatore che descrive il potenziale, tramite l'Equazione di Poisson:

- Nel caso Elettrostatico, data una distribuzione di carica $\rho_q(x, y, z)$, il potenziale V soddisfa l'equazione
$$\Delta V(x, y, z) = -\frac{\rho_q(x, y, z)}{\epsilon_0} \tag{2}$$
- Nel caso Gravitazionale, data una distribuzione di massa $\rho_m(x, y, z)$, il potenziale Φ soddisfa l'equazione
$$\Delta\Phi(x, y, z) = -4\pi G\rho_m(x, y, z) \tag{3}$$

2 Funzione di Green associata al Laplaciano N-dimensionale

Dato un operatore L in N dimensioni, la funzione di Green associata è quella che risolve l'equazione

$$L[G_N(\underline{X}, \underline{Y})] = \delta^{(N)}(\underline{X} - \underline{Y}) \tag{4}$$

In particolare, come operatore L, prendiamo in analisi il Laplaciano N-dimensionale, e ne ricerchiamo la sua funzione di Green.
Inanzitutto, osserviamo che poiché è presente la funzione Delta di Dirac, "centrata" nel punto $\underline{Y}$, il problema presenta una simmetria polare: e quindi la funzione di Green dipende da $\underline{X}$ e da $\underline{Y}$ non in un modo qualsiasi, ma bensì

$$G_N(\underline{X}, \underline{Y}) = G_N(|\underline{X} - \underline{Y}|_N) \tag{5}$$

Per risolvere il problema 4, si procede nel seguente modo:

1. Si definisce una palla n-dimensionale
$$B_r := [\underline{X} \in \mathbf{R^N} : |\underline{X} - \underline{Y}|_N < r] \tag{6}$$
sul cui volume andremo poi ad integrare l'Eq. 4
2. Si ricorda la definizione di Laplaciano
$$\Delta G_N = \overline{\nabla} \cdot (\overline{\nabla G_N})$$
e il Teorema della Divergenza
$$\int_V \overline{\nabla} \cdot \overline{F} dV = \oint_{\partial V} \overline{F} \cdot \hat{n} dS$$

3. Integriamo su tale palla l'Eq. 4:

$$1 = \int_{B_r} \Delta G_N dV = \int_{B_r} \overline{\nabla} \cdot \overline{\nabla G_N} dV = \oint_{\partial B_r} \overline{\nabla G_N} \cdot \hat{n} dS$$

   in cui l'uno a primo membro equivale all'integrale della Delta di Dirac.

4. Osserviamo che nel prodotto scalare finale, l'unico versore che non si cancella è quello radiale, poichè perpendicolare alla superficie di B_r; e quindi scrivendo il gradiente di G_N in coordinate polari ed eseguendo il prodotto scalare, e scrivendo il differenziale dS in termini dell'angolo solido ($dS = r^{N-1} d\Omega_N$), si ottiene

$$1 = \oint_{\partial B_r} \frac{\partial G_N}{\partial r} r^{N-1} d\Omega_N = \frac{\partial G_N}{\partial r} r^{N-1} \oint_{\partial B_r} d\Omega_N = \frac{\partial G_N}{\partial r} r^{N-1} A_N$$

   dove con A_N si intende l'area della sfera N-dimensionale.

5. Infine, dall'ultima relazione ottenuta, risulta per qualsiasi dimensione N

$$\frac{\partial G_N}{\partial r} = \frac{1}{A_N r^{N-1}} \tag{7}$$

   In particolare, nel caso di nostro interesse in cui N=3, ricordando che per definizione $r = |\underline{X} - \underline{Y}|_N$, si ottiene

$$G_3(|\underline{X} - \underline{Y}|_3) = -\frac{1}{4\pi|\underline{X} - \underline{Y}|_3} \tag{8}$$

Quindi, ora che abbiamo ottenuto la funzione di Green associata all'operatore Laplaciano tridimensionale, data una distribuzione di carica qualsiasi $\rho_q(x, y, z)$, il potenziale è sempre noto, a meno della risoluzione dell'integrale

$$V(\underline{X}) = \int \rho_q(\underline{Y}) G_3(\underline{X} - \underline{Y}) d\underline{Y} \tag{9}$$

Questo integrale spesso non è risolvibile analiticamente; in questi casi si utilizzano metodi numerici.

3 Sistemi analizzati e Risultati

Con $Q_L(x, y, z)$ si intende una funzione che vale uno nel cubo di lato L centrato nel punto P=(x,y,z). Il piano scelto per rappresentare le isolinee del potenziale è in tutti i casi z=0.

3.1 Cubo omogeneo

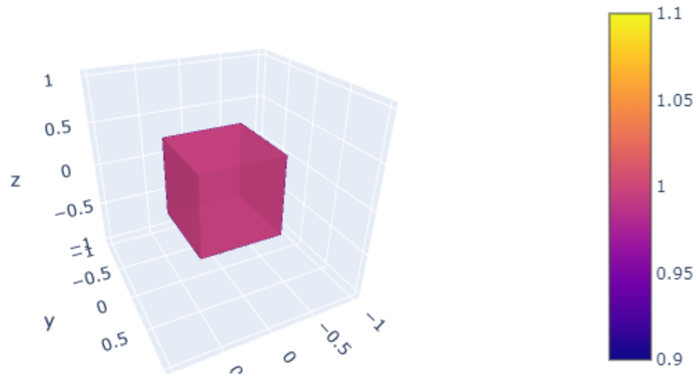

Figura 1: La distribuzione è $\rho = Q_1(0, 0, 0)$

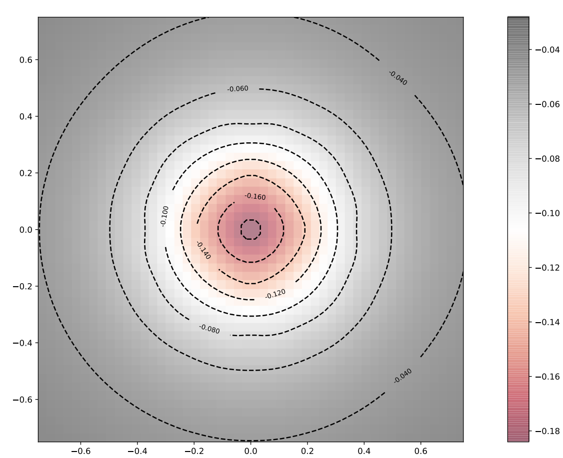

Figura 2: Si osserva che allontanandosi dal centro della distribuzione il potenziale ottenuto è simile a quello di una sfera

3.2 Cubi non omogenei

3.2.1 Cubo con distribuzione gaussiana

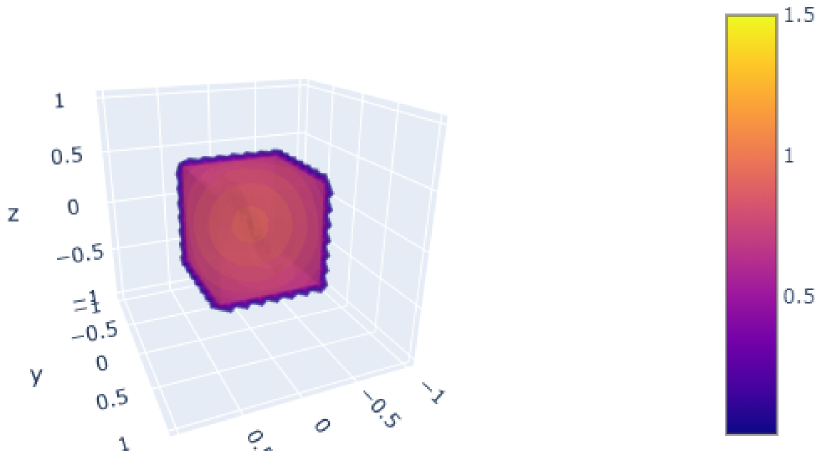

Figura 3: La distribuzione è $\rho = Q_1(0,0,0)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}$

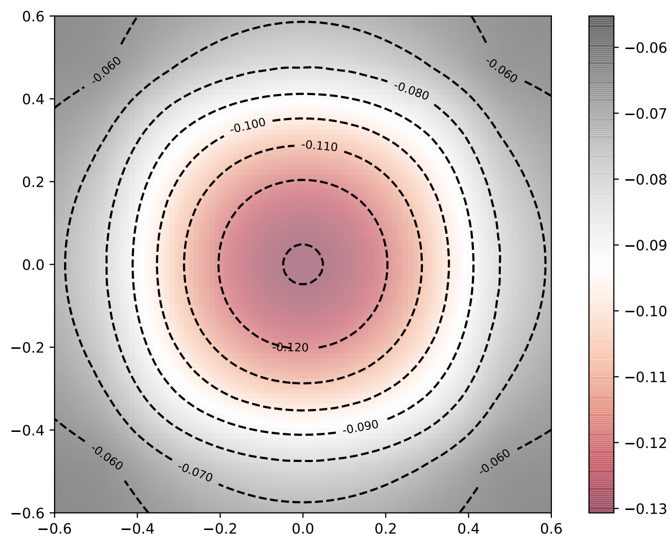

Figura 4: Si osserva che al centro il potenziale è congruente a quello di una distribuzione sferica, mentre allontanandosi si accentua la deviazione dovuta alla distribuzione a forma di cubo.

3.2.2 Cubo con distribuzione esponenziale

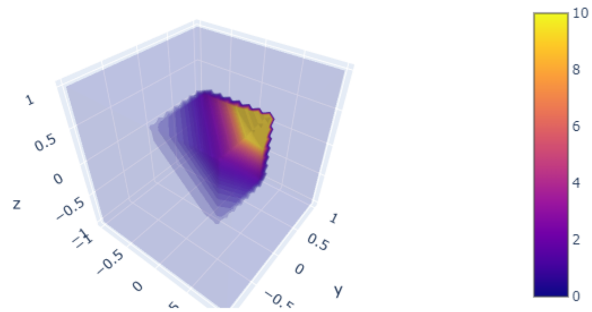

Figura 5: La distribuzione è $\rho = Q_1(0,0,0)e^{x+y+z}$

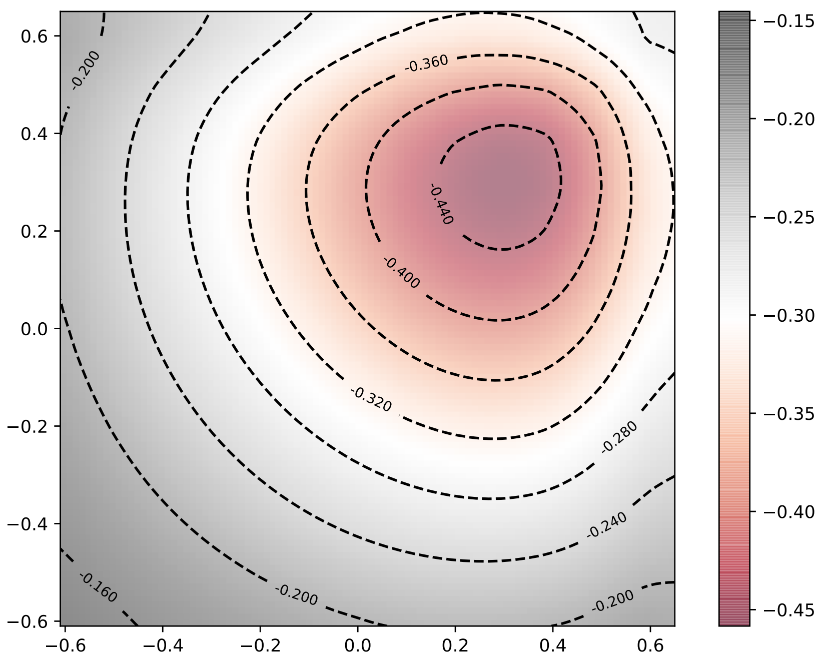

Figura 6

3.3 Due cubi, dipolo

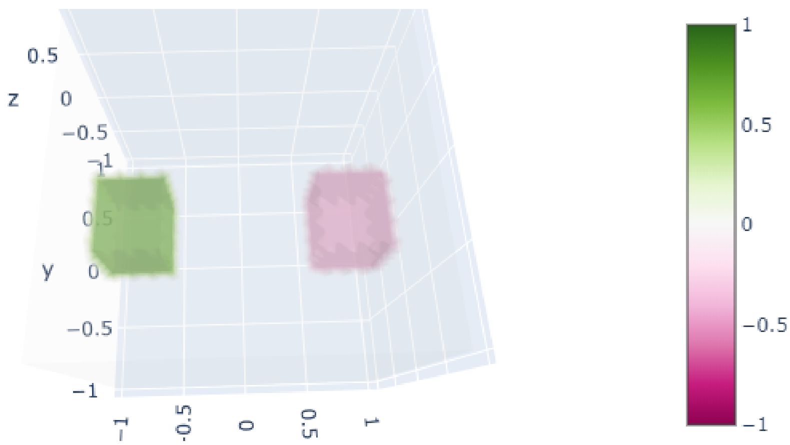

Figura 7: La distribuzione è $\rho = Q_{0.5}(-0.75, 0, 0) - Q_{0.5}(0.75, 0, 0)$

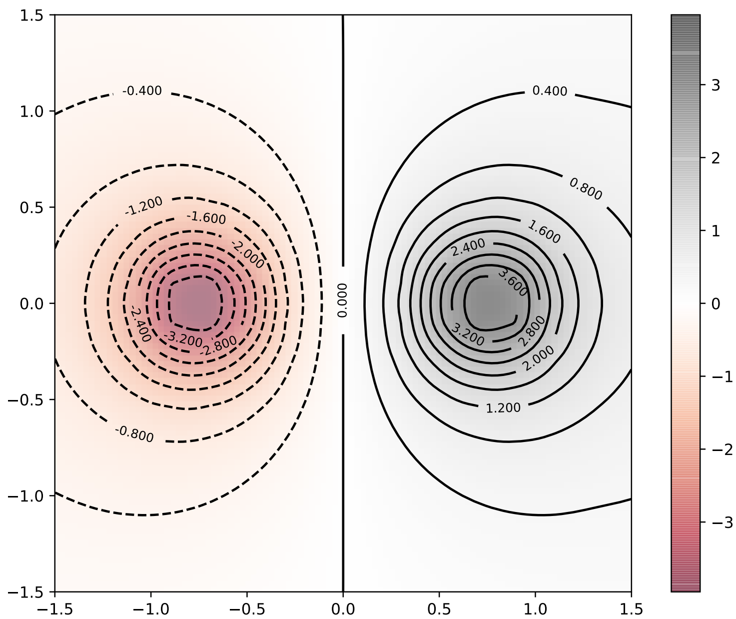

Figura 8: Si osserva che a grandi linee, l'andamento del potenziale è simile a quello di un dipolo.