Percorso d'Eccellenza Metodo di Green

Prima esperienza

D'Amico Francesco

3 settembre 2020

Indice

1 Metodo di Green **1**

2 Oscillatore Forzato **1**
2.1 Soluzione Omogenea . . . 1
2.2 Soluzione Particolare e Metodo di Green . . . 2
2.3 Analisi della funzione di Green ottenuta e determinismo nei sistemi meccanici . . . 3

3 Sistemi studiati e Risultati ottenuti **4**
3.1 Forzante a Gradini . . . 4
3.2 Forzante a Denti di Sega . . . 5
3.3 Forzante a impulsi Gaussiani . . . 6

1 Metodo di Green

Il metodo di Green è un importante strumento di risoluzione per problemi lineari della forma

$$L_x u(x) = f(x) \tag{1}$$

in cui L_x è un operatore lineare differenziale, $f(x)$ una funzione nota, e $u(x)$ la funzione incognita. Data una equazione differenziale ordinaria lineare, che è possibile rappresentare come nell'Eq. 1, il suo integrale generale è della forma

$$u(x) = u_p(x) + \sum_{n=1}^{N} a_n u_n(x) \tag{2}$$

e cioè la somma di una soluzione particolare $u_p(x)$ e una sommatoria di soluzioni omogenee $u_n(x)$. Nello specifico, il metodo di Green serve ad ottenere la soluzione particolare di una equazione della forma 1. Si definisce funzione di Green $G(x, x')$ associata all'operatore L_x la funzione che risolve l'equazione

$$L_x G(x, x') = \delta(x - x') \tag{3}$$

Calcolata la forma della funzione di Green, che generalmente dipende anche dalle condizioni al contorno del problema, si dimostra che la soluzione particolare dell'Eq 1 risulta

$$u_p(x) = \int f(x')G(x, x')dx' \tag{4}$$

2 Oscillatore Forzato

L'equazione dell'Oscillatore Forzato è

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + w_0^2 x(t) = \frac{f(t)}{m} \tag{5}$$

Si affronta la risoluzione del caso "Sottosmorzato", cioè quello in cui vale $\gamma < w_0$

2.1 Soluzione Omogenea

Si dimostra che la soluzione della omogenea è della forma

$$x(t) = c_1 e^{-\gamma t} cos(w_1 t + c_2) \tag{6}$$

in cui si è definito

$$w_1 = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} \tag{7}$$

Le due costanti iniziali sono legate alle condizioni iniziali di posizione e velocità tramite le relazioni

$$c_2 = tg^{-1}\left(\frac{-v(0)/x(0) - \gamma}{w_1}\right) \tag{8}$$

$$c_1 = \frac{x(0)}{cos(c_2)} \tag{9}$$

Di conseguenza, a seguito di questi calcoli, dati i parametri del problema e le sue condizioni iniziali, la parte di soluzione omogenea è completamente determinata. E' notevole il fatto che la soluzione è stata determinata analiticamente; vedremo che invece per quanto riguarda la soluzione particolare ottenuta con il metodo di Green, in generale il risultato è noto a meno di un integrale, spesso non risolvibile analiticamente.

2.2 Soluzione Particolare e Metodo di Green

Come descritto nell'Eq 3, la funzione di Green associata all'operatore dell'oscillatore forzato è quella che risolve

$$L_t G(t,t') = [\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma\frac{\partial}{\partial t} + w_0^2]G(t,t') = \delta(t-t') \tag{10}$$

Tramite trasformate di Fourier, in partcolare sfruttando la regola della derivazione, si può convertire questa equazione differenziale in una equazione algebrica, la cui soluzione è

$$G(\omega,t') = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - 2i\gamma\omega - w_0^2} \tag{11}$$

Ora, per tornare nelle variabili di partenza, è necessario eseguire l'antitrasformata:

$$G(t,t') = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega^2 - 2i\gamma\omega - w_0^2}d\omega = -\frac{1}{2\pi}I \tag{12}$$

L'integrale I si risolve con il metodo dei residui. La funzione integranda ha due poli singoli nel semipiano complesso della parte immaginaria positiva, simmetrici rispetto all'asse immaginario. I due residui sono

$$\omega_{1,2} = i\gamma \pm \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$$

Si utilizza il Lemma di Jordan. Nei punti in cui $t < t'$ è necessario estendere la semicirconferenza nel semipiano immaginario negativo; in questo semipiano, come osservato precedentemente, non sono presenti poli, pertanto: se $t < t'$

$$G(t,t') = 0$$

Quando invece $t > t'$, per il Teorema dei residui, indicando con I' l'integrale lungo la semicirconferenza del semiasse immaginario positivo, si ha

$$I + I' = 2\pi i(Res(f(\omega),\omega_1) + Res(f(\omega),\omega_2))$$

Per il Lemma di Jordan l'integrale I' è nullo; calcolando i residui e manipolando il risultato, si ottiene

$$G(t,t') = \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{\sqrt{w_0^2-\gamma^2}}sin[\sqrt{w_0^2-\gamma^2}(t-t')]\theta(t-t') \tag{13}$$

dove si è inserito il fatto che per $t < t'$ la funzione di Green è nulla tramite l'introduzione della funzione gradino $\theta(t-t')$. Ora che la funzione di Green associata all'operatore dell'oscillatore forzato è nota, è possibile ricavare in automatico la risposta del sistema ad una qualsiasi perturbazione esterna $f(t)/m$, utilizzando la proprietà dell'Eq. 4

$$x_p(t) = \int\frac{f(t')}{m}G(t,t')dt' \tag{14}$$

Abbiamo trovato la soluzione particolare del sistema per una perturbazione esterna forzante qualsiasi, ma questo integrale spesso non è risolvibile analiticamente. In questi casi si rendono necessari i metodi numerici per risolvere questo integrale e trovare la soluzione.

2.3 Analisi della funzione di Green ottenuta e determinismo nei sistemi meccanici

E' possibile osservare, nella funzione di Green che abbiamo ottenuto nell'Eq 13, che è presente la funzione gradino $\theta(t-t')$, che vale zero per $t < t'$. In particolare, è possibile vedere dall'Eq. 3 che la funzione di Green stessa può essere vista come la risposta del sistema ad una forzante fatta come la Delta di Dirac: è la risposta del sistema ad una perturbazione impulsiva di "modulo" unitario. Tale perturbazione, per le proprietà della Delta di Dirac, avviene al tempo $t = t'$. Dato che la funzione di Green ottenuta, a causa della funzione gradino, è nulla per tempi $t < t'$, questo equivale a dire che gli effetti di una perturbazione impulsiva si propagano solamente in avanti nel tempo. Questo risultato è compatibile con il principio classico di Causalità, per il quale gli effetti di un evento avvengono a tempi posteriori delle cause che li hanno generati. Questo continua ad essere valido anche per forzanti qualsiasi, poichè il metodo di Green tratta queste funzioni come la somma di infiniti impulsi, la cui soluzione è la sovrapposizione delle soluzioni, come è possibile osservare nell'Eq. 4.

3 Sistemi studiati e Risultati ottenuti

3.1 Forzante a Gradini

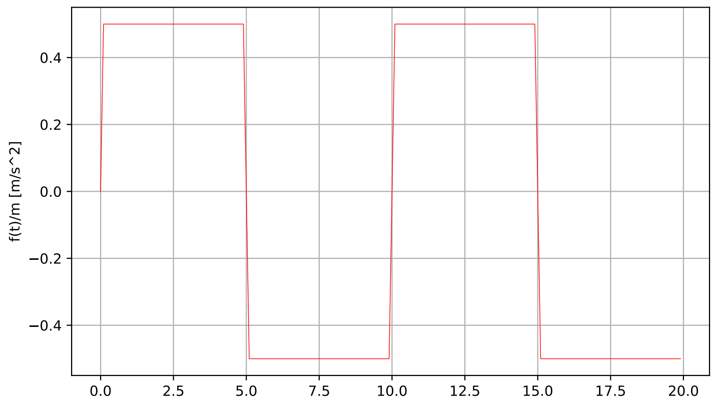

Figura 1: Forzante analizzata

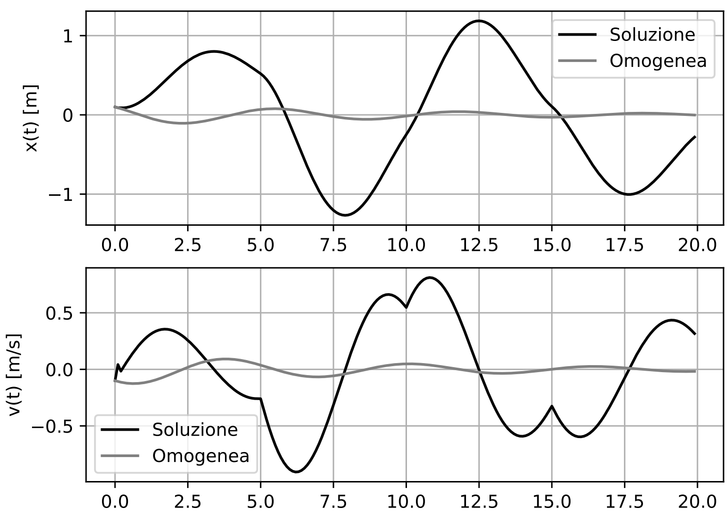

Figura 2: Risposta del sistema. I parametri sono stati scelti nel seguente modo: $w_0 = 1$, $\gamma = 0.1$, $x_0 = 0.1$ $v_0 = -0.1$.

3.2 Forzante a Denti di Sega

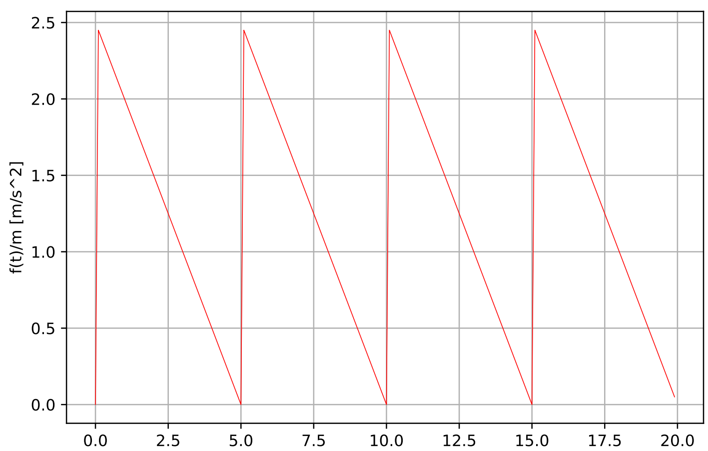

Figura 3: Forzante analizzata

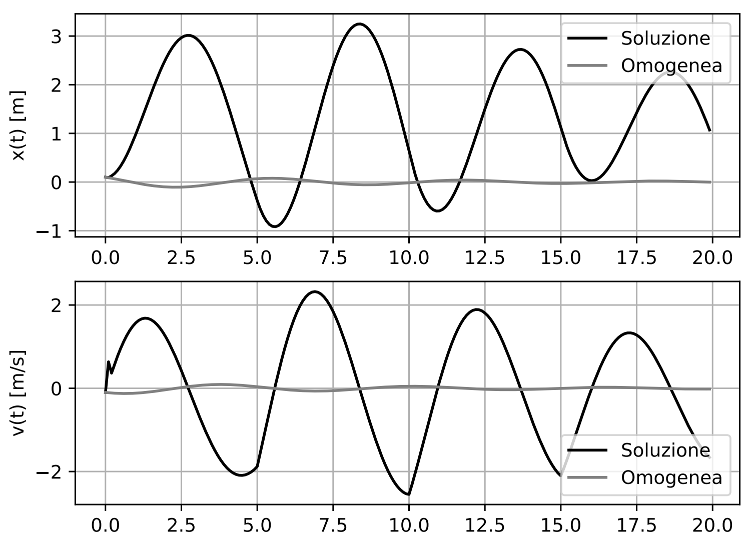

Figura 4: Risposta del sistema. I parametri sono stati scelti nel seguente modo: $w_0 = 1$, $\gamma = 0.1$, $x_0 = 0.1$ $v_0 = -0.1$.

3.3 Forzante a impulsi Gaussiani

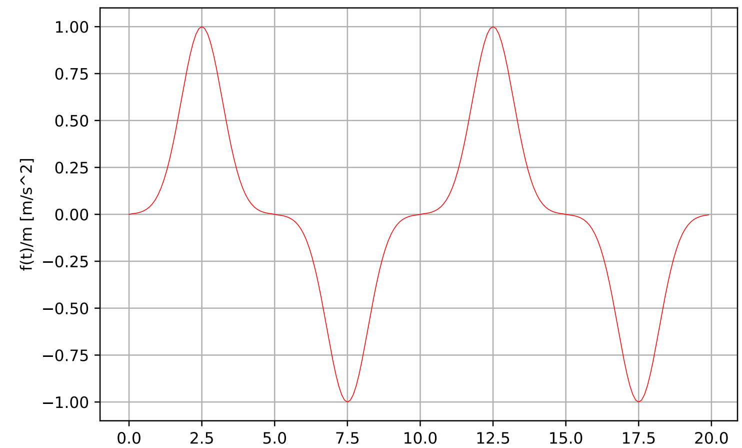

Figura 5: Forzante analizzata

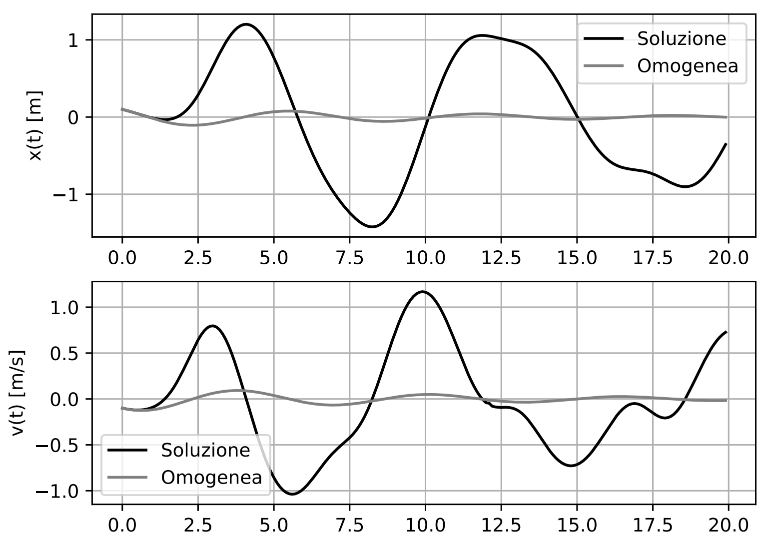

Figura 6: Risposta del sistema. I parametri sono stati scelti nel seguente modo: $w_0 = 1$, $\gamma = 0.1$, $x_0 = 0.1$ $v_0 = -0.1$.